一、$I_n=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nx}{(1+2^x)\sin x}dx=\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{(1+2^x)\sin x}dx+\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin nx}{(1+2^x)\sin x}dx$，

将第二个积分利用变量替换可以得到

$$I_n=\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{(1+2^x)\sin x}dx+\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{(1+2^{-x})\sin x}dx=\int_0^{\pi}\frac{(1+2^x)\sin nx}{(1+2^x)\sin x}dx$$
$$=\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}dx.$$

当 $n=0$ 时 $I_1=0$. 当 $n=1$ 时 $I_1=\pi$.

当 $n\ge 2$ 时，得到 $I_n-I_{n-2}=\int_0^{\pi}\frac{\sin nx-\sin(n-2)x}{\sin x}dx=2\int_0^{\pi}\cos(n-1)xdx=0.$

从而利用递推公式可以得到 $I_n=\begin{cases}0 & n\text{是偶数，}\\ \pi & n\text{是奇数.}\end{cases}$

二、**解法一：** $f'(x)=7x^6+12x^5-30x^4-32x^3+51x^2+12x-20$，

用辗转相除法，得 $\left(f(x),f'(x)\right)=x^5+x^4-5x^3-x^2+8x-4$.

于是 $q(x)=\frac{f(x)}{\left(f(x),f'(x)\right)}=x^2+x-2=(x-1)(x+2)$.

由于 $f(x)$ 与 $q(x)$ 有完全相同的不可约因式 $x-1,x+2$，可见 $f(x)$ 有根 1，−2. 再用综合除法，即

$$\begin{array}{r|rrrrrrrr}
1 & 1 & 2 & -6 & -8 & 17 & 6 & -20 & 8 \\
 & & 1 & 3 & -3 & -11 & 6 & 12 & -8 \\ \hline
1 & 1 & 3 & -3 & -11 & 6 & 12 & -8 & |0 \\
 & & 1 & 4 & 1 & -10 & -4 & 8 & \\ \hline
1 & 1 & 4 & 1 & -10 & -4 & 8 & |0 & \\
 & & 1 & 5 & 6 & -4 & -8 & & \\ \hline
1 & 1 & 5 & 6 & -4 & -8 & |0 & & \\
 & & 1 & 6 & 12 & 8 & & & \\ \hline
1 & 1 & 6 & 12 & 8 & |0 & & & \\
 & & 1 & 7 & 19 & & & & \\ \hline
 & 1 & 7 & 19 & |27 & & & &
\end{array}$$

可见 1 是 $f(x)$ 的四重根，−2 是 $f(x)$ 的三重根.

解法二： $f(x)$ 为首项系数为 1 的整系数多项式，故它的有理根都是整数，且都

是常数项的因子. 常数项 8 的因子为 $\pm1,\pm2,\pm4,\pm8$. 对 $x=1$ 应用综合除法检验（同上），可见 $x=1$ 为 $f(x)$ 的四重根，有 $f(x)=(x-1)^4(x^3+6x^2+12x+8)$，且而对 $g(x)=x^3+6x^2+12x+8$，有

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 6 & 12 & 8 \\ & & -1 & -5 & -7 \\ \hline & 1 & 5 & 7 & 1\neq 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 6 & 12 & 8 \\ & & 2 & 16 & 56 \\ \hline & 1 & 8 & 28 & 64\neq 0 \end{array}$$

所以 $x=-1,x=2$，不是 $g(x)$ 的有理根，从而不是 $f(x)$ 的有理根, 又有

$$\begin{array}{r|rrr|l} -2 & 1 & 6 & 12 & 8 \\ & & -2 & -8 & -8 \\ \hline -2 & 1 & 4 & 4 & 0 \\ & & -2 & -4 & \\ \hline -2 & 1 & 2 & & 0 \\ & & -2 & & \\ \hline -2 & 1 & & & 0 \end{array}$$

可见 $g(x)=(x+2)^3$，故 $f(x)=(x-1)^4(x+2)^3$，即 $x=1$ 为 $f(x)$ 的四重根，$x=-2$ 为 $f(x)$ 的三重根.

三、**解法一：** 设$P(\xi,\ \eta,\ \zeta)$是所求圆柱面上的任意一点，柱面上过此点的直母线有参数方程

$$x=\xi+lt, y=\eta+mt, z=\zeta+nt$$

这母线与球面相切，即t的二次方程

$$(\xi+lt)^2+(\eta+mt)^2+(\zeta+nt)^2=R^2$$

或

$$(l^2+m^2+n^2)t^2+2(l\xi+m\eta+n\zeta)t+(\xi^2+\eta^2+\zeta^2-R^2)=0$$

有重根，所以$(\xi,\ \eta,\ \zeta)$必需且只需满足方程

$$(l\xi+m\eta+n\zeta)^2-(l^2+m^2+n^2)(\xi^2+\eta^2+\zeta^2-R^2)=0.$$

把动点P的坐标换成通常的x,y,z, 即得所求圆柱面的方程

$$(lx+my+nz)^2-(l^2+m^2+n^2)(x^2+y^2+z^2-R^2)=0.$$

解法二： 这个圆柱面显然就是经过原点并有方向向量v的直线为轴，球面的半径R为半径的圆柱面. 轴的方程用向量表示是$r=tv$，对于柱面上任意一点P，如$r=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，则它到轴的距离应等于$R$，所以有

$$\frac{|r\times v|}{|v|}=R,\text{即}(r\times v)^2=R^2v^2.$$

即

利用拉格朗日公式，上式可写成

$$v^2r^2-(v\cdot r)^2=R^2v^2\text{或}(v\cdot r)^2=v^2(r^2-R^2),$$

其坐标形式与上面的结果一致.

四、**证明：** 令 $x_n=(p+1)\left(1^p+2^p+\cdots+n^p\right)-n^{p+1}$， $y_n=(p+1)n^p$，则 $y_{n+1}>y_n$，

$y_n\to\infty(n\to\infty)$，并且

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{(p+1)(n+1)^p+\left[n^p-(n+1)^{p+1}\right]}{(p+1)\left[(n+1)^p-n^p\right]}$$

$$=\frac{\frac{p(p+1)}{2}n^{p-1}+\cdots}{p(p+1)n^{p-1}+\cdots}\to\frac{1}{2}(n\to\infty),$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{1}{2}$.

五、**证明：** (1) 令 $F(x)=f(x)-1+x,x\in[0,1]$ 由题设知， $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，又

$F(0)=f(0)-1=-1<0,F(1)=f(1)=1>0$

由连续函数的零点定理知，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$

在区间 $[0,\xi]$ 和 $[\xi,1]$ 上分别对 $f(x)$ 用拉格朗日中值定理得

$$\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi}=f'(\eta)\qquad\eta\in(0,\xi)$$

$$\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=f'(\zeta)\qquad\zeta\in(\xi,1)$$

此时， $f'(\eta)f'(\zeta)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi}\cdot\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{f(\xi)}{1-\xi}\cdot\frac{1-f(\xi)}{\xi}=1$

六、**证明：** 由曲边梯形的面积和直边梯形的面积比较得到

$$\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}x^n dx<\frac{1}{2}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^n+\left(\frac{i-1}{n}\right)^n\right]\frac{1}{n},i=1,2,\cdots n.$$

利用积分区间的可加性

$$\int_0^1 x^n dx < \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^n + \left(\frac{i-1}{n}\right)^n\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^n\right] + \frac{1}{2n}$$

从而

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{i}{n}\right)^n > n\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{n-1}{2(n+1)}.$$