一、**解**：令 $x=\tan\theta$ 则

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(1+\tan\theta)}{\sec^2\theta}d\tan\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan\theta)d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin\theta+\cos\theta)d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos\theta)d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos\theta)d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sqrt{2}d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos\theta)d\theta$$

$$=\frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2}+I_2-I_1,$$

其中 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos\varphi d\varphi$，从而得到 $I=\frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2}$.

二、**解**：考虑函数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. 由归纳法，$0<a_n\le 1$，因而这个级数当 $|x|<1$ 时是绝对收敛的，$f(0)=1$，并且函数在区间 $[0,1)$ 是正的. 我们的目标是计算 $f(\frac{1}{2})$. 由迭代公式，

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{n-k+2}x^n$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k\sum_{n=k}^{\infty}\frac{x^{n-k}}{n-k+2}$$

$$=f(x)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m+2}.$$

因此，

$$\ln f(x)=\ln f(x)-\ln f(0)$$

$$=\int_0^x\frac{f'}{f}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{m+1}}{(m+1)(m+2)}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}-\frac{x^{m+1}}{m+2}\right)$$

$$=1+\left(1-\frac{1}{x}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{m+1}}{m+1}$$

$$=1+\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln\frac{1}{1-x},$$

于是,

$$\ln f\left(\frac{1}{2}\right)=1-\ln 2，\ 即\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{e}{2}.$$

三、**解:** 适当选取直角坐标系$Oxyz$，使得z轴是$l_1$ 和$l_2$ 的公垂线，原点与$l_1$ 和$l_2$ 等距，且$xz$平面与$l_1$和$l_2$ 交成等角. 于是$l_1$和$l_2$的方程分别为

$$l_1\begin{cases}y=\kappa x,\\ z=c;\end{cases}\quad l_2:\begin{cases}y=-\kappa x\\ z=-c\end{cases}\left(|\kappa\neq 1|,\ c\neq 0\right).$$

经过$l_1$或$l_2$的平面方程分别为

$(y-\kappa x)+\lambda(z-c)=0$和$(y-\kappa x)+\lambda(z-c)=0.$

那么这两个平面互相垂直的充要条件是

$$1-\kappa^2+\lambda\mu=0.$$

联立上面三个方程得到

$$\begin{cases}(y-\kappa x)+\lambda(z-c)=0,\\ (y-\kappa x)+\lambda(z-c)=0,\\ 1-\kappa^2+\lambda\mu=0,\end{cases}$$

从而有

$$\begin{cases}y^2-\kappa^2x^2=\lambda\mu(z^2-c^2),\\ 1-\kappa^2+\lambda\mu=0.\end{cases}$$

由此消去$\lambda,\mu$，得到

$$y^2-\kappa^2x^2=(\kappa^2-1)(z^2-c^2).$$

写成标准方程的形式，即

$$\frac{x^2}{\frac{\kappa^2-1}{\kappa^2}c^2}-\frac{y^2}{(\kappa^2-1)c^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.(*)$$

这就是轨线上点的坐标所应满足的必要条件.

现在方程(*)是轨迹上的点的坐标所应满足的充要条件. 如点$P_0$的坐标$(x_0,y_0,z_0)$适合方程，且$z_0^2\neq c^2$，则可取

$$\lambda_0=-\frac{y_0-\kappa x_0}{z_0-c},\mu_0=-\frac{y_0+\kappa x_0}{z_0+c}$$

且由于${y_0}^2-\kappa^2{x_0}^2=(\kappa^2-1)({z_0}^2-c^2)$, 有

$$1-\kappa^2+\lambda_0\mu_0=1-\kappa^2+\frac{y_0^2-\kappa^2x_0^2}{z_0^2-c^2}=1-\kappa^2+\kappa^2-1=0,$$

所以$P_0$在分别经过$l_1$，$l_2$且互相垂直的两个平面

$$y-\kappa x+\lambda_0(z-c)=0\ 和\ (y-\kappa x)+\mu_0(z+c)=0$$

上，从而在它们的交线，即在轨迹上.

如$z_0^2 = c^2$, 则$P_0$在四条直线$\begin{cases} y = \pm\kappa x \\ z = \pm c \end{cases}$上. 不难看到，直线$l_1$和 $l_2$都在轨迹上. 直线

$$l_3\colon \begin{cases} y = -\kappa x \\ z = c \end{cases} \text{和} l_4\colon \begin{cases} y = \kappa x \\ z = -c \end{cases}$$

显然也在轨迹上. 例如，平面$y = -\kappa x$和$z = c$分别经过$l_2$和 $l_1$且互相垂直，所以$l_3$在轨迹上，$l_1$和 $l_2$上的点也在轨迹上. 例如，点$(x_0, \kappa x_0, c)(x_0 \neq 0)$在平面

$$\kappa\, \mathrm{cx} + \mathrm{cy} - \kappa\, x_0(\mathrm{z} + \mathrm{c}) = 0 \text{ 和 } \mathrm{y} - \mathrm{kx} + \frac{c(1+\kappa^2)}{\kappa x_0}(\mathrm{z} - \mathrm{c}) = 0$$

上，这两个平面分别经过$l_1$和 $l_2$，且互相垂直.

总之，方程$(*)$就是轨迹的方程，其图形是一个单叶双曲面.

四、**证明：** 由于$A = BA - AB$，那么$tr(A) = tr(BA - AB) = 0$.

不妨令$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix}$，则$A^2 = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11}^2 + a_{12}a_{21} \end{pmatrix} = aE$

由 $A = BA - AB$，那么 $A^2 = ABA - {}^2A,\ B\,{}^2A = BA$ . 两式相加，可得

$2A^2 = BA^2 - A^2$ .

将式（1）代入式（2），则$a = 0$，代入式（1）得$A^2 = 0$.

五、**证明：** (1) 因为$f(x)$是$[-1,1]$上的奇函数，所以$f(0) = 0$。因为函数$f(x)$在$[0,1]$上可导，根据拉格朗日中值定理，存在$\xi \in (0,1)$，使得$f(1) - f(0) = f'(\xi)$

又因为$f(1) = 1$, 所以$f'(\xi) = 1$

(2) 因为$f(x)$是奇函数，所以$f'(x)$是偶函数，故$f'(-\xi) = f'(\xi) = 1$

令$F(x) = [f'(x) - 1]e^x$，则$F(x)$可导，且$F(-\xi) = F(\xi) = 0$

根据罗尔定理，存在$\eta \in (-\xi, \xi) \subset (-1,1)$，使得$F'(\eta) = 0$

由$F'(\eta) = [f''(\eta) + f'(\eta) - 1]e^\eta$且$e^\eta \neq 0$，得$f''(\eta) + f'(\eta) = 1$

六、**解：** 下面我们用归纳法证明$0 < 1 - x_n < \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

$n = 0$时，因为$\dfrac{1}{2} < x_0 = a_0 < 1$，结论成立.

假设结论对于$n$成立，我们考虑$n+1$.

由条件，有

$$1 - x_{n+1} = 1 - \frac{a_{n+1} + x_n}{1 + a_{n+1}x_n} = \frac{1 - a_{n+1}}{1 + a_{n+1}x_n}(1 - x_n).$$

因为，$0<\dfrac{1-a_{n+1}}{1+a_{n+1}x_n}<\dfrac{1-\frac{1}{2}}{1+0}=\dfrac{1}{2}$，我们得到

$$0<1-x_{n+1}<\frac{1}{2}(1-x_n)<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2^{n+2}},$$

即结论对于$n+1$也成立.

于是，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.