南昌大学第十五届高等数学竞赛（非数学专业组）答案

序号：______ 姓名：__________ 学号：______________ 学院：________

班级：______________ 第____考场 考试日期：______________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分	累分人签名
题分	30	10	12	12	12	12	12	100	
得分									

注：本卷共四页，七道大题.

一、填空题(每小题 5 分，共 30 分)

1、已知可导函数 $f(x)$ 满足 $f(x)\cos x+2\int_0^x f(t)\sin t dt=x+1$，则 $f(x)=\underline{\sin x+\cos x}$.

2、$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)=\underline{\ 0\ }$.

3、二重积分 $\iint\limits_{D:|x|+|y|\le 1}(|x|+|y|)dxdy=\frac{4}{3}$.

4、$\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}=\underline{\frac{1}{2}\ln 2}$.

5、曲面 $z=x^2+y^2+1$ 在 $(1,-1,3)$ 的切平面方程为 $\underline{z=2x-2y-1}$.

6、$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\tan^4 x}=\underline{\frac{\pi}{4}}$.

二、（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x[(t-1)\int_0^{t^2}\varphi(u)\mathrm{d}u]\mathrm{d}t}{\sin^2 x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 其中函数 φ 处处连续．讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性及可导性.

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x[(t-1)\int_0^{t^2}\varphi(u)\mathrm{d}u]\mathrm{d}t}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)\int_0^{x^2}\varphi(u)\mathrm{d}u}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^{x^2}\varphi(u)\mathrm{d}u}{2x}-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\varphi(u)\mathrm{d}u}{2x}=0-\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\varphi(x^2)}{2}=0=f(0)$$ 因此，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x[(t-1)\int_0^{t^2}\varphi(u)\mathrm{d}u]\mathrm{d}t}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)\int_0^{x^2}\varphi(u)\mathrm{d}u}{3x^2}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^{x^2}\varphi(u)\mathrm{d}u}{x^2}-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\varphi(u)\mathrm{d}u}{x^2}\quad=-\frac{1}{3}\varphi(0)$$

因此， $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=-\dfrac{1}{3}\varphi(0)$.

三、（本题满分 12 分）

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0,\ f(1)=1$．求证对任意正数 a,b，在 $(0,1)$ 内必存在不等的两个数 x_1,x_2，使得 $\dfrac{a}{f'(x_1)}+\dfrac{b}{f'(x_2)}=a+b$.

证　由 $0<\dfrac{a}{a+b}<1$ 及介值定理得存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f(\xi)=\dfrac{a}{a+b}$.

由拉格朗日中值定理存在 $x_1\in(0,\xi)$ 使得 $f(\xi)-f(0)=\xi f'(x_1)$，即 $\dfrac{\frac{a}{a+b}}{f'(x_1)}=\xi$，（1）

同理存在 $x_2\in(\xi,1)$ 使得 $f(1)-f(\xi)=(1-\xi)f'(x_2)$，即 $\dfrac{\frac{a}{a+b}}{f'(x_2)}=1-\xi$，　（2）

将（1）（2）两式相加得 $\dfrac{\frac{a}{a+b}}{f'(x_1)}+\dfrac{\frac{b}{a+b}}{f'(x_2)}=1$. 即 $\dfrac{a}{f'(x_1)}+\dfrac{b}{f'(x_2)}=a+b$.

四、（本题满分 12 分）

1、已知平面区域 $D=\left\{(r,\theta):2\le r\le 2(1+\cos\theta),-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$，计算 $\iint\limits_D xdxdy$.

$$\iint\limits_D xdxdy=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta\int_2^{2(1+\cos\theta)}r^2dr=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta[(1+\cos\theta)^3-1]d\theta$$

$$=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\cos^2\theta+3\cos^3\theta+\cos^4\theta)d\theta$$

$$=\frac{16}{3}\left(3\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}+3\times\frac{2}{3}\times1+\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\right)=5\pi+\frac{32}{3}$$

五、（本题满分 12 分）

求证：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^2}dx>\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}dx$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}dx(u=\frac{\pi}{2}-x)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin u-\cos u}{1+(\frac{\pi}{2}-u)^2}du=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1+(\frac{\pi}{2}-x)^2}dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x-\sin x)(\frac{\pi}{4}-x)}{(1+x^2)[1+(\frac{\pi}{2}-x)^2]}dx>0$$

六、（本题满分 12 分）

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)dx=0,\ \int_0^1 xf(x)dx=1$. 求证：存在 $x_0\in[0,1]$ 使 $|f(x_0)|>4$.

若 $\forall x\in[0,1]$，$|f(x)|\le 4$，则

$$1=\int_0^1 (x-\frac{1}{2})f(x)dx\le\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right||f(x)|dx\le 4\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|dx=1$$

因此 $\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right||f(x)|dx=1$，而 $4\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|dx=1$，

故 $\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|(4-|f(x)|)dx=0$，

所以对于任意的 $x\in[0,1]$，$|f(x)|=4$，由连续性知 $f(x)\equiv 4$ 或 $f(x)\equiv -4$。

这就与条件 $\int_0^1 f(x)dx=0$ 矛盾。

故 $\exists x_0\in[0,1]$，使 $|f(x_0)|>4$

七、（本题满分 12 分）

设 $y=y(x)$ 由方程 $e^{-y}+\int_0^x e^{-t^2}dt-y+x=1$ 所确定的隐函数.

（1）证明 $y(x)$ 是单调增加的；（2）求 $\lim\limits_{x\to+\infty}y'(x)$.

$e^{-y^2}y'+e^{-x^2}-y'+1=0$，$y'=\dfrac{e^{-x^2}+1}{e^{-y}+1}$，由 $y'>0$ 得 $y(x)$ 是单调增加的.

(2) 若 $y(x)$ 有上界，由于 $y(x)$ 是单调增加的，因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=a$（$a$ 为常数），对 $e^{-y}+\int_0^y e^{-t^2}dt-y+x=1$ 两边取极限得 $e^{-a}+\int_0^a e^{-t^2}dt-a-1=-\infty$，矛盾。因此 $y(x)$ 无上界，由于 $y(x)$ 是单调增加的，因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=+\infty$，从而 $\lim\limits_{x\to+\infty}y'=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x^2}+1}{e^{-y}+1}=1$.