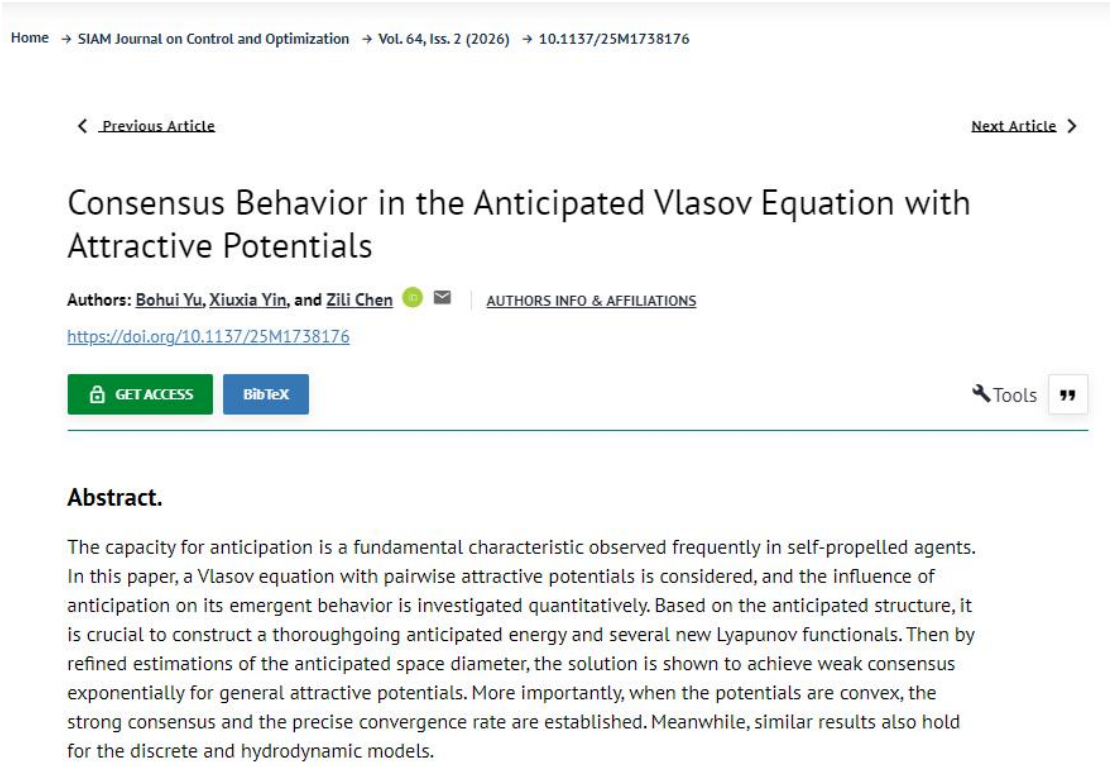
数学与计算机学院讯：日前，我院数学专业硕士研究生俞柏慧作为第一作者的学术论文“Consensus behavior in the anticipated Vlasov equation with attractive potentials”，正式在国际控制与优化领域权威期刊《SIAM Journal on Control and Optimization》（简称 SICON）刊发。该论文由俞柏慧在陈自力副教授的全程指导下完成，陈自力副教授为通讯作者，尹秀霞教授作为核心合作者参与了研究工作。



Home → SIAM Journal on Control and Optimization → Vol. 64, Iss. 2 (2026) → 10.1137/25M1738176

Previous Article　　Next Article

Consensus Behavior in the Anticipated Vlasov Equation with Attractive Potentials

Authors: Bohui Yu, Xiuxia Yin, and Zili Chen　AUTHORS INFO & AFFILIATIONS

https://doi.org/10.1137/25M1738176

GET ACCESS　BibTeX　Tools

Abstract.

The capacity for anticipation is a fundamental characteristic observed frequently in self-propelled agents. In this paper, a Vlasov equation with pairwise attractive potentials is considered, and the influence of anticipation on its emergent behavior is investigated quantitatively. Based on the anticipated structure, it is crucial to construct a thoroughgoing anticipated energy and several new Lyapunov functionals. Then by refined estimations of the anticipated space diameter, the solution is shown to achieve weak consensus exponentially for general attractive potentials. More importantly, when the potentials are convex, the strong consensus and the precise convergence rate are established. Meanwhile, similar results also hold for the discrete and hydrodynamic models.

期刊介绍：

《SIAM Journal on Control and Optimization》创刊于 1962 年，是美国工业与应用数学学会（SIAM）旗下的权威期刊，聚焦控制理论、优化方法及其交叉领域的前沿原创成果，是控制科学、应用数学领域公认的高水平学术刊物，对研究的创新性、严谨性和理论价值有着极为严苛的评审标准。该期刊中国数学会分区为 T1。

论文简介：

在鸟群、鱼群、细胞组织等多粒子系统中，个体往往不仅依据当前或历史信息决策，还具备根据预测状态而行动的能力。当粒子数很大时，相应平均场模型为带预期结构的 Vlasov 方程。论文考虑每个个体利用预测位置决策，且通信权重依赖于个体间的“预期距离”。论文关注的核心问题是：这种预期机制是否会破坏或促进一致性？能否给出严格的收敛速度？在凸势情形下能否得到更强的一致收敛结论？通过构造“全预测能量”和建立新的微观能量估计，本文对部分长程通讯下的该模型建立了经典解的指数收敛的弱一致性。进一步，对凸势的情形，对所有长程通讯都建立了解的强一致性。

THEOREM 1.3. *Let the nonnegative initial data* $f_0 \in C_c^1(\mathbb{R}^{2d}) \cap \mathcal{P}(\mathbb{R}^{2d})$.

(1) *Assume that* $U \in C^2, U(0) = U'(0) = 0$ *satisfies*

$$(1+r^2)^{-\frac{\beta}{2}} \lesssim \frac{U'(r)}{r}, \quad U' \le \sqrt{cU}, \quad 0 \le \beta < 2, \tag{1.6}$$

where $c > 0$. *Then there exists a unique classical solution* $f \in C^1(\mathbb{R}^+; C_c^1(\mathbb{R}^{2d}))$ *to model* (1.5). *If* $\beta \le \frac{2}{9}$, *then the anticipated space diameter is uniformly bounded, and the solution* f *achieves weak consensus exponentially.*

(2) *Assume that* U *further satisfies*

$$(1+r^2)^{-\frac{\beta}{2}} \lesssim \frac{U'(r)}{r}, \quad |U''| \lesssim 1, \quad 0 \le \beta < 2. \tag{1.7}$$

If $\beta \le \frac{2}{5}$, *then the anticipated space diameter is uniformly bounded, and the solution* f *achieves weak consensus exponentially.*

(3) *Assume that* U *further satisfies*

$$U''(r) \approx (1+r^2)^{-\frac{\beta}{2}}, \quad 0 \le \beta < 2. \tag{1.8}$$

If $\beta \le 1$, *then the solution* f *achieves strong consensus exponentially.*

论文也考虑了相应的流体模型。若初始密度紧支撑且解为全局经典解，则在吸引势且 β ⩽2/5 时，流体模型实现指数弱一致性，即

$$\int (|u(t,x)-u(t,y)|^2+|x-y|^2)\ \rho(t,x)\,\rho(t,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant Ce^{-Ct};$$

$$\int (|u(t,x)-u(t,y)|^2+|x-y|^2)\,\rho(t,x)\,\rho(t,y)\,dx\,dy \leqslant Ce^{-Ct};$$

在凸势且 β ⩽1 时，流体模型实现指数强一致性：

$$\sup_{x,y\in supp\ \rho(t)}(|x-y|^2+|u(t,x)-u(t,y)|^2)\leqslant Ce^{-Ct}.$$

类似结论对原始离散粒子系统同样成立。

论文的主要创新包括：第一，针对预期结构构造了“全预期能量”

$$E(t)=\int|v+\tau F|^2 f+\iint U(|x+\tau v-y-\tau w|)ff,$$

并证明其与经典能量在 $U'\lesssim\sqrt{U}$ 条件下等价；第二，引入了包含 $x^\tau\cdot v^\tau$ 及预期势修正项的新型 Lyapunov 泛函，克服了传统能量耗散估计缺乏强制性的困难；第三，精细估计了预期空间直径 $D(t)$，证明其一致有界，从而完成弱一致性证明；第四，利用微观 Lyapunov 泛函建立强一致性。该研究为“预期机制”在多粒子系统以及 Vlasov 方程中的作用提供了严格的数学理论保证，说明预期结构在吸引势下不仅不会阻碍一致性，反而可在更广的通信权重范围内诱导指数弱一致性，并在凸势下导致强一致性。相关结果对理解生物群体、智能控制中的预测决策与集体行为具有理论意义，也为离散、动理学和流体等不同尺度模型的一致性分析提供了新工具。